

Ad-Soyad :

Numara :

Cevap Anahtarı

MAT 103 Lineer Cebir I Ara Sınav Soruları

01.12.2021

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Başarılar dilerim.

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazarak cevaplayınız.

(D) Her vektör uzayı değişmeli gruptur.

(Y) İki alt vektör uzayının birleşimi de alt vektör uzayıdır.

(D) Her halkada birinci işlemin birim elemanı vardır.

(D) Rasyonel sayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte bir cisimdir.

(Y) Her iç işlemin birim elemanı vardır.

2) \mathbb{Z} tamsayılar kümesi üzerinde $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x * y = x + y - x \cdot y$ olarak tanımlanan işlem ile birlikte $(\mathbb{Z}, *)$ ikilisinin bir grup olup olmadığını araştırınız.

3) Çift tam sayılar kümesini \mathbb{Z}_6 ile gösterelim. \mathbb{Z}_6 kümesinin bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte \mathbb{Z} tam sayılar halkasının bir alt halkası olduğunu gösteriniz.

4) $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}, x + y + z = 0\}$ kümesinin bilinen toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte \mathbb{R} reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olup olmadığını araştırınız.

5) (G, \cdot) bir grup olmak üzere $\forall x \in G$ için $x^{-1} = x$ ise G nin değişmeli grup olduğunu gösteriniz.

$\mathbb{Z} \neq \emptyset$ olduğunu biliyoruz.

* işlemin mi? $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ alalım.

$x * y = x + y - xy \in \mathbb{Z} \Rightarrow *$, \mathbb{Z} de bir işlemdir.

* birleşimli mi? $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için $(x * y) * z = x * (y * z)$ mi?

$$(x * y) * z = (x + y - xy) * z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \\ = x + y - xy + z - xz - yz + xyz$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - yz) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \\ = x + y + z - yz - xy - xz + xyz$$

$$((\mathbb{Z}, +) \text{ değişmeli}) = x + y - xy + z - xz - yz + xyz$$

$(x * y) * z = x * (y * z)$ olup * işleminin \mathbb{Z} de birleşimlidir.

Birim eleman: $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x * e = e * x = x$ olacak şekilde $e \in \mathbb{Z}$ var mı?

$$x * e = x + e - xe = x \Leftrightarrow e - xe = 0 \Leftrightarrow e(1 - x) = 0 \\ \Leftrightarrow e = 0 \text{ veya } x = 1$$

$$e * x = e + x - ex = x \Leftrightarrow e - ex = 0 \Leftrightarrow e(1 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow e = 0 \text{ veya } x = 1$$

$e = 0 \in \mathbb{Z}$, * işleminin birim elemanıdır.

Ters eleman: $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x * y = y * x = 0$ olacak şekilde $y \in \mathbb{Z}$ var mıdır?

$$x * y = 0 \Leftrightarrow x + y - xy = 0 \Leftrightarrow y(1 - x) = -x \Leftrightarrow y = -\frac{x}{1 - x}$$

$x = 1 \in \mathbb{Z}$ elemanının tersi yoktur. Bu nedenle, $(\mathbb{Z}, *)$ ikilisi grup değildir.

$$\underline{\mathbb{Z}_4 \neq \emptyset}: 0 \in \mathbb{Z}_4 \Rightarrow \mathbb{Z}_4 \neq \emptyset.$$

$$\underline{\mathbb{Z}_4 \subset \mathbb{Z}}: \forall x \in \mathbb{Z}_4 \text{ için } x \in \mathbb{Z} \text{ olup } \mathbb{Z}_4 \subset \mathbb{Z} \text{ dir.}$$

$\forall x, y \in \mathbb{Z}_4$ alalım. $x, y \in \mathbb{Z}_4$ için $x = 2k_1$, $y = 2k_2$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$x - y = 2k_1 - 2k_2 = 2(\underbrace{k_1 - k_2}_{\in \mathbb{Z}}) \in \mathbb{Z}_4$$

$$xy = (2k_1)(2k_2) = 4k_1k_2 = 2(\underbrace{2k_1k_2}_{\in \mathbb{Z}}) \in \mathbb{Z}_4$$

0 halde, $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$; \mathbb{Z} tam sayılar halkasının alt halkasıdır.

$$4) \underline{V \neq \emptyset}: x=y=z=0 \text{ için } x+y+z=0 \text{ olduğundan } (0,0,0) \in V \text{ olup } V \neq \emptyset \text{ dir.}$$

\mathbb{R}^3 ün \mathbb{R} reel sayılar cisiminde bilinen toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri ile birlikte bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz. $V \subset \mathbb{R}^3$ olduğu açıktır. V nin \mathbb{R}^3 ün alt vektör uzayı olduğunu gösterirsek V bu işlemler ile birlikte bir vektör uzayı olur.

$$\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in V, \forall c \in \mathbb{R} \text{ alalım.}$$

$$(*) \quad x_1 + y_1 + z_1 = 0, \quad x_2 + y_2 + z_2 = 0 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} c(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (cx_1, cy_1, cz_1) + (x_2, y_2, z_2) \\ &= (cx_1 + x_2, cy_1 + y_2, cz_1 + z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (cx_1 + x_2) + (cy_1 + y_2) + (cz_1 + z_2) &= (cx_1 + cy_1 + cz_1) + (x_2 + y_2 + z_2) \\ &= c(\underbrace{x_1 + y_1 + z_1}_0) + \underbrace{(x_2 + y_2 + z_2)}_0 \\ &\stackrel{(*)}{=} 0 \end{aligned}$$

.. V , verilen islemler ile birlikte vektör uzayıdır.

5) (G, \cdot) bir grup olsun. $\forall x \in G$ için $x^{-1} = x$ olduğunu kabul edelim. $\forall x, y \in G$ için $xy = yx$ olduğunu gösterelimiz.

$$xy = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1} = yx$$

(Kabulden) (Kabulden)

$\therefore (G, \cdot)$ değişmeli gruptur.